TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

1. A função f diz-se homogénea de grau a se e só se: $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^a f(x,y,z)$, sendo a o grau de homogeneidade de f.

Ora,

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= (\lambda x)^2 \lambda y \lambda z + (\lambda x)^3 (\lambda y)^{\alpha-1} + (\lambda y)^2 (\lambda z)^\alpha = \\ &= \lambda^4 x^2 yz + \lambda^{3+\alpha-1} x^3 y^{\alpha-1} + \lambda^{2+\alpha} y^2 z^\alpha = \\ &= \lambda^4 x^2 yz + \lambda^{\alpha+2} x^3 y^{\alpha-1} + \lambda^{2+\alpha} y^2 z^\alpha \end{aligned}$$

ou seja, a função f é homogénea de grau 4 se e só se $\alpha + 2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

2. Determinação dos pontos críticos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x\left(kx + y^2\right) + ke^x = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x\left(kx + y^2 + k\right) = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x\left(kx + k\right) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx + k = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Temos um único ponto crítico: $(-1,\ 0)$.

Classificação do ponto crítico $(-1,\ 0)$:

A matriz Hessiana do ponto $(-1,\ 0)$ é dada por:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} e^x\left(kx + y^2 + 2k\right) & 2ye^x \\ 2ye^x & 2e^x \end{bmatrix} \Rightarrow Hf(-1,0) = \begin{bmatrix} ke^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{bmatrix}$$

Sendo $Hf(-1,0)$ uma matriz triangular, os elementos da diagonal principal ke^{-1} e $2e^{-1}$ são os valores próprios.

- Se $k > 0$, os valores próprios são ambos positivos; $Hf(-1,0)$ é definida positiva e consequentemente o ponto $(-1,\ 0)$ é um minimizante.
- Se $k < 0$, os valores próprios são de sinais contrários; $Hf(-1,0)$ é indefinida e consequentemente o ponto $(-1,\ 0)$ é um ponto de sela.

3. a) $y = e^{5x}$ é solução da E.D. homogénea associada sse:

$$\left(e^{5x}\right)'' - 4\left(e^{5x}\right)' - 5\left(e^{5x}\right) = 0 \Leftrightarrow 25e^{5x} - 20e^{5x} - 5e^{5x} = 0 \Leftrightarrow 0e^{5x} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

b) Determina-se a solução geral da E.D. homogénea $y_h(x)$:

Temos $P(D)=0 \Leftrightarrow D^2-4D-5=0 \Leftrightarrow (D-5)(D+1)=0 \Leftrightarrow D=5 \vee D=-1$; e portanto:

$$y_h(x)=c_1e^{5x}+c_2e^{-x}, \quad \text{com } c_1 \text{ e } c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determina-se a solução particular da E.D. não homogénea $y_p(x)$:

Fazendo $y_p(x)=Ax+B$, obtêm-se: $y_p'(x)=A$ e $y_p''(x)=0$. Fazendo as substituições na E.D. dada, vem:

$$-4A-5(Ax+B)=5x \Leftrightarrow -5Ax-4A-5B=5x$$

Por identificação dos polinómios, obtêm-se o sistema:

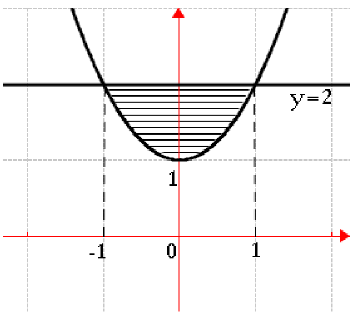
$$\begin{cases} -5A=5 \\ -4A-5B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

A solução particular é dada por: $y_p(x)=-x+\dfrac{4}{5}$.

A solução geral da E.D. é:

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x) \text{ ou seja } y(x)=c_1e^{5x}+c_2e^{-x}-x+\frac{4}{5}, \quad c_1 \text{ e } c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Temos $x^2+1=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$.



$$\iint_A xe^y\,dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{x^2+1}^{2} xe^y\,dydx=\int_{-1}^{1} x\left[e^y\right]_{x^2+1}^{2}dx=\int_{-1}^{1} x\left(e^2-e^{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{e^2x^2}{2}-\frac{e^{x^2+1}}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}\right)=0$$

5. a) Fazendo $u=\dfrac{y}{x}$, temos $h(x,y)=x\,f\left(\dfrac{y}{x}\right)=x\,f(u)$.

Para $x\neq 0$, obtêm-se:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=f(u)+x\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=f(u)+x\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{-y}{x^2}\right)=f(u)-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=x\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{x}=\frac{\partial f}{\partial u}$$

b) Cálculo de $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y)$.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{-y}{x^2}\right) + \frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) =$$
$$= \frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial h^2}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial h^2}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

Substituindo $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y)$ na equação dada, obtêm-se:

$$x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = x\left(\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right) + y\left(\frac{-y}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right) = \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \text{ c.q.d}$$